

EQUAÇÃO CONSTITUTIVA QUADRÁTICA PARA SOLOS

(teoria, ensaio laboratorial e estudo de caso)

Elyσιο R. F. Ruggeri
Eng. Civil pela EMOP

Apresentação

Teoricamente devemos considerar que um *maciço terroso*, feito com certo material, é sede de vários fenômenos (físicos e químicos). O maciço é campo desses fenômenos. De um modo mais amplo, **campo** significa região D do espaço ocupada por matéria, referida a um sistema ortogonal O-xyz, a cada ponto $P \equiv (x, y, z)$ da qual esteja associada alguma propriedade (física ou química). Essa propriedade é definida (ou representada) por funções poliádicas do ponto P, unívocas e contínuas, de diferentes *valências* (ou tensores de diferentes ordens), cujos argumentos podem ser outros poliádicos que são funções de P, ou, mesmo, constantes.

Ordinariamente, nos campos de fenômenos mecânicos - estudados pela Mecânica do Contínuo - ocorrem grandezas escalares, vetoriais e diádicas, variáveis com P. Como grandeza escalar, podemos citar a temperatura T, com $T = T(P)$; como grandeza vetorial, o vetor deslocamento **u** do ponto genérico (um monádico), com $\mathbf{u} = \mathbf{u}(P)$; as grandezas diádicas são representadas pelo diádico de tensão $\boldsymbol{\sigma} = \boldsymbol{\sigma}(P)$ e o de deformação, $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{\varepsilon}(P)$.

Com base em pura *geometria* pode-se:

1) - definir o campo, isto é, a região do espaço a considerar, ocupada por massa material (o corpo físico real, propriamente) pelas equações:

$$\begin{cases} x = x(\lambda, \mu, \nu) \\ y = y(\lambda, \mu, \nu) \\ z = z(\lambda, \mu, \nu) \end{cases}, \text{ em que } \begin{cases} A < x < B \\ C < y < D \\ E < z < F \end{cases}, \quad (A, B, C, D, E \text{ e } F \text{ números reais dados}), \quad (\text{I});$$

2) - introduzir o conceito de deformação em cada ponto (variação relativa de distâncias e de ângulos) e os modos de medir essas deformações em cada ponto de D, bastando, para tal, estudar a deformação de um tetraedro qualquer no entorno do ponto;

3) - definir o vetor deslocamento, $\mathbf{u}(P)$, de cada ponto de D;

4) - estabelecer o diádico simétrico de deformações, $\boldsymbol{\varepsilon}(P)$, associado ao ponto, em função de **u**:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \frac{1}{2} (\nabla \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} + \nabla^T \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}), \quad (\text{II}).$$

Nota 1:

As equações (I) são o ponto de partida da “discretização” de D para a resolução dos problemas pelo método dos elementos finitos.

Com base na *mecânica newtoniana* (que trata de movimento de corpos *rígidos*) estabelecem-se: o diádico simétrico de tensões, $\boldsymbol{\sigma}(P)$, associado a cada ponto de D; e a *equação vetorial* do movimento:

$$\rho \mathbf{f} + \text{div } \boldsymbol{\sigma} = \rho \frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial t^2}, \quad (\text{III})$$

com ρ =massa específica do material e **f** força mássica por unidade de massa (tipo gravidade, **g**), ambas constantes.

Juntam-se a essas equações as condições dos vínculos do corpo com seu exterior (são as *condições no contorno*) e as condições relativas ao tempo (*condições iniciais* de movimento).

Estas condições são *necessárias* ao entendimento do fenômeno, *mas não são suficientes* porque o corpo real não é rígido.

Com base na Física - pela Termodinâmica, particularmente – buscaram-se as condições *suficientes* para o estudo, isto é, buscaram-se as leis de conservação de energia e princípios gerais da Termodinâmica, decorrendo daí várias **equações constitutivas**. Uma dessas equações correlaciona os tensores de tensão $\sigma(P)$ e deformação $\varepsilon(P)$ do campo; e quem estabelece a conexão são poliádicos característicos do material, representantes de grandezas características do material.

Como imposição primordial, consideraremos aqui apenas os *materiais mecanicamente isotrópicos*, isto é, aqueles cujas propriedades mecânicas em um ponto qualquer de sua massa e em qualquer direção por esse ponto são sempre as mesmas (são constantes)¹. Nesse caso, a conexão entre os diádicos de tensão e deformação nas mencionadas equações constitutivas é realizada por poliádicos 4H e 6H ou por 4G e 6G , ditos todos *isotrópicos*², como nas equações fundamentais

$$\sigma = {}^4H : \varepsilon + {}^6H \cdot \varepsilon \varepsilon, \quad \text{ou} \quad \varepsilon = {}^4G : \sigma + {}^6G \cdot \sigma \sigma, \quad (IV).$$

Nestas equações faz-se referência a uma operação entre poliádicos, dita *multiplicação pontuada múltipla* (denotadas pelos sinais: $:$ e \cdot), sobre as quais muito se deveria dizer para justificar a simplificação que será apresentada na seção seguinte.

A isotropicidade do material é de importância fundamental na proposta apresentada porque qualquer amostra do material (coletada em qualquer ponto de uma massa em estado natural, ou de uma massa artificial) pode ser considerada um representante do mesmo do ponto de vista do seu comportamento mecânico. Isto significa que com um único corpo de prova é possível simular o que pode se passar em qualquer ponto de um maciço. Além disso, devemos considerar que os tensores de tensão e de deformação são simétricos e têm as mesmas direções principais ortogonais entre si.

As equações (II), (III) e (IV), acrescidas das condições de contorno e iniciais, são as necessárias e suficientes para o estudo dos fenômenos mecânicos que ocorram em D. As equações (II) e (III) estão estabelecidas, restando definir-se (IV), ou os poliádicos constantes 4H e 6H , ou 4G e 6G .

Uma máquina fundamental

Imaginemos agora uma *máquina* que, sob total controle e conhecimento nosso, pudesse aplicar continua e paulatinamente, por pequenos acréscimos, tensões e deformações variáveis e distintas, mas conhecidas, em três direções ortogonais, a um corpo de prova (cp) do material. Isto significa ter conhecimento de pares de tensores correspondentes (σ, ε) atuantes no cp, os quais devem satisfazer as equações fundamentais acima citadas. Tendo-se tais pares em quantidade suficiente, será possível o cálculo indireto dos poliádicos 4H , 6H , 4G e 6G e, portanto, o estabelecimento das leis inversas (IV).

1 – As equações básicas (IV)

Considerações teóricas sobre os poliádicos exibidos nas equações constitutivas fundamentais³ permitem reduzi-las, não sem muito trabalho e não sem menção a muitos conceitos previamente definidos e estudados, às formas quadráticas gerais seguintes:

$$\varepsilon = (F_1 \sigma_E + F_2 \sigma_E^2 + F_3 \|\sigma\|) \mathbf{I} + (F_4 + F_5 \sigma_E) \sigma + F_6 \sigma^2, \quad (1.01),$$

ou

$$\sigma = (S_1 \varepsilon_E + S_2 \varepsilon_E^2 + S_3 \|\varepsilon\|) \mathbf{I} + (S_4 + S_5 \varepsilon_E) \varepsilon + S_6 \varepsilon^2, \quad (1.02).$$

em que os Fs e os Ss são constantes, σ_E e ε_E são os denominados *escalares* dos diádicos σ e ε^4 e $\|\sigma\|$ a norma de σ (equivalente à norma do vetor). Mais à frente transformaremos estas equações poliádicas em equações matriciais e, também, em sistemas de equações algébricas.

¹ Essas propriedades são invariantes para qualquer translação e qualquer rotação por essa massa.

² Há várias referências a esses poliádicos em meu livro, [1]; e podem ser procuradas pelo índice analítico apresentado.

³ Apresentadas no §20.01, Cap. IV, Vol. I, T. I, de nossas “Lições de Cálculo Poliádico”, [1]

⁴ É oportuno lembrar que o tensor σ e o tensor ε (representados por diádicos) têm ambos os mesmos autovetores ou direções principais (ortogonais entre si), aqui denotadas por 1, 2 e 3⁴ e que o produto pontuado deles é comutativo ($\sigma \cdot \varepsilon = \varepsilon \cdot \sigma$).

A dilatação ϵ_E do solo – variação de volume por unidade de volume em qualquer carregamento - pode ser determinada tomando-se o escalar de ambos os membros de (1.01), tendo-se:

$$\epsilon_E = (3F_1 + F_4)\sigma_E + (3F_2 + F_5)\sigma_E^2 + (3F_3 + F_6) \|\sigma\|, \quad (1.03).$$

Dilatações positivas representam expansão do solo; negativas, contração. Da mesma forma podemos escrever:

$$\sigma_E = (3S_1 + S_4)\epsilon_E + (3S_2 + S_5)\epsilon_E^2 + (3S_3 + S_6) \|\epsilon\|, \quad (1.04).$$

As equações (1.01) e (1.02) são as formas mais simples e as mais gerais de expressão da equação constitutiva quadrática de qualquer material sólido e constituem, também, a parte de menor custo do processo de estabelecimento da equação constitutiva. O modo clássico de resolver problemas com sólidos é baseado na clássica lei linear de Hooke que não se aplica satisfatoriamente a todos os materiais sólidos, exceto aos elásticos que vão trabalhar dentro do período elástico.

*

Os solos são materiais eminentemente *plásticos* e seu comportamento mecânico, quando sujeito à ação de esforços, é sempre do tipo *não linear*. Por isso, sua *equação constitutiva* – que estabelece uma conexão entre os tensores de tensão e deformação em todo ponto de dada massa de solo -, se escolhida da forma polinomial, deve ser *quadrática*⁵.

Os solos podem ter ampla resistência à compressão, mas muito pequena à tração. Isto significa que a *deformação de ruptura* dos solos pode ser definida como sua *resistência ao estiramento*, quando suas deformações assumem valores negativos necessariamente. O limite das deformações dos solos por “encurtamento” é zero, sempre⁶.

Um solo poderá estar submetido a grandes tensões e não se romper; mas se romperá sempre que for atingido o valor de sua deformação de ruptura em alguma direção. Tudo dependerá dos valores relativos das tensões a que estejam submetidos. Tudo indica, também, que as deformações devam estabelecer um bom critério para a fixação de um *estado de ruptura* do solo.

É fácil ver que (1.01), por exemplo, encampa o modelo linear: $\epsilon = (F_1\sigma_E)\mathbf{I} + (F_4)\sigma$, no qual não aparece nenhum produto de tensões. Aliás, esta expressão que pode ser comparada com a clássica $\epsilon = \frac{1+\nu}{E}\sigma - \frac{\nu}{E}(T_1\sigma)\mathbf{I}$, logo com $F_4=(1+\nu)/E$ e $F_1 = -\nu/E$. Os modelos lineares podem ser usados como equações constitutivas de concretos, por exemplo; mas é pouco útil para solos.

O problema constitui-se, agora, em como determinar as constantes plásticas F, ou as S, contidas nas equações (1.01) e (1.02).

A máquina mágica e o solo ensaiado

É sobejamente conhecida dos geotécnicos a chamada *máquina de ensaio triaxial convencional* que aplica a um cp cilíndrico, cujo eixo é coincidente com o da máquina, uma tensão σ_1 variável, segundo esse eixo e tensão hidrostática fixa na direção normal à primeira. Algumas limitações da máquina convencional foram eliminadas da chamada máquina TTA (True Triaxial Apparatus) que pode realizar ensaios drenados e não drenados, com medição de pressão nos poros, tensões aplicadas e deformações ocorridas em variados estágios de carregamento.

Vale lembrar que a aplicação das equações (1.01) e (1.02) para o solo (poroso) ensaiado com a máquina TTA exige que o tensor de tensões seja o *efetivo*, denotado por σ , e que efetivamente atua no esqueleto sólido, bem como o tensor de deformações. Assim, se σ_{maq} é o tensor de tensões aplicado pela máquina ao cp e se σ' é a pressão (hidrostática) nos poros, $\sigma = \sigma_{maq} - \sigma'\mathbf{I}$. Como a deformação nos poros (deformação sofrida pela água intersticial) é praticamente nula, a deformação imposta ao cp pela máquina é igual à deformação assimilada pelo seu esqueleto sólido; e o denotaremos por ϵ .

⁵ As equações de grau superior ao segundo podem ser reduzidas à quadrática pela utilização do Teorema de Cayley-Hamilton.

⁶ Em compressão hidrostática, por exemplo, a deformação (positiva) dos solos é sempre finita e tende para zero, independentemente do valor da tensão de compressão a que estejam submetidos.

Vale lembrar, para efeito de aplicação das equações gerais (1.01) e (1.02), que os tensores σ_{maq} e σ têm as mesmas direções principais, o que, de fato, se verifica. Se \hat{n} é uma destas direções, $\sigma \cdot \hat{n} = \sigma_{maq} \cdot \hat{n} - \sigma' \hat{n}$; e sendo $\sigma_{maq} \cdot \hat{n}$ paralelo a \hat{n} , será também $\sigma \cdot \hat{n}$ paralelo a \hat{n} .

Temos destacado que o solo é suposto isotrópico e que, por isso, os diferentes estados de tensões principais em uma mesma amostra de solo (o que se consegue com a máquina TTA), podem representar o que se passa em qualquer ponto de um maciço, pouco importando as direções principais desse ponto. Lembramos, ainda, que tensões e deformações devem variar continua e gradualmente desde zero até seus valores finais. Isto, aliás, é o que acontece na prática quando se executam aterros.

Nota 2:

Os modelos lineares podem ser usados como equações constitutivas de concretos, por exemplo, embora seja necessário, para estes, uma máquina TTA com maior capacidade de aplicação de tensões, pois são bem mais resistentes que os solos.

O solo ensaiado é uma areia fina e seca, moldada à vácuo, em forma de prisma reto, com arestas 75x75x150mm.

2 – Preparação das equações

2.1 – Cálculos das constantes com um estágio de carga

Referida às direções principais de σ e de ϵ , a equação tensorial (1.01) pode ser escrita na forma:

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \epsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \epsilon_3 \end{bmatrix} = (F_1 \text{Tr}\sigma + F_2 (\text{Tr}\sigma)^2 + F_3 \|\sigma\|) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + (F_4 + F_5 \text{Tr}\sigma) \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} + F_6 \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}.$$

Com um pequeno malabarismo algébrico, esta expressão matricial pode ser escrita na forma equivalente

$$\begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Tr}\sigma & (\text{Tr}\sigma)^2 & \|\sigma\| & \sigma_1 & \sigma_1 \text{Tr}\sigma & (\sigma_1)^2 \\ \text{Tr}\sigma & (\text{Tr}\sigma)^2 & \|\sigma\| & \sigma_2 & \sigma_2 \text{Tr}\sigma & (\sigma_2)^2 \\ \text{Tr}\sigma & (\text{Tr}\sigma)^2 & \|\sigma\| & \sigma_3 & \sigma_3 \text{Tr}\sigma & (\sigma_3)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}, \quad (2.01),$$

em que se destaca a coluna das constantes incógnitas, todos os elementos das demais matrizes podendo ser deduzidos dos dados fornecidos pela máquina TTA (tensões aplicadas ao cp, pressão nos poros e deformações ocorridas). Assim, por transposição em (2.01)

$$\begin{bmatrix} \text{Tr}\sigma & \text{Tr}\sigma & \text{Tr}\sigma \\ (\text{Tr}\sigma)^2 & (\text{Tr}\sigma)^2 & (\text{Tr}\sigma)^2 \\ \|\sigma\| & \|\sigma\| & \|\sigma\| \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1 \text{Tr}\sigma & \sigma_2 \text{Tr}\sigma & \sigma_3 \text{Tr}\sigma \\ (\sigma_1)^2 & (\sigma_2)^2 & (\sigma_3)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \epsilon_1 \\ \epsilon_2 \\ \epsilon_3 \end{bmatrix} = M \cdot \begin{bmatrix} F_1 \\ F_2 \\ F_3 \\ F_4 \\ F_5 \\ F_6 \end{bmatrix}$$

com

$$M = \begin{bmatrix} \text{Tr}\sigma & \text{Tr}\sigma & \text{Tr}\sigma \\ (\text{Tr}\sigma)^2 & (\text{Tr}\sigma)^2 & (\text{Tr}\sigma)^2 \\ \|\sigma\| & \|\sigma\| & \|\sigma\| \\ \sigma_1 & \sigma_2 & \sigma_3 \\ \sigma_1 \text{Tr}\sigma & \sigma_2 \text{Tr}\sigma & \sigma_3 \text{Tr}\sigma \\ (\sigma_1)^2 & (\sigma_2)^2 & (\sigma_3)^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Tr}\sigma & (\text{Tr}\sigma)^2 & \|\sigma\| & \sigma_1 & \sigma_1 \text{Tr}\sigma & (\sigma_1)^2 \\ \text{Tr}\sigma & (\text{Tr}\sigma)^2 & \|\sigma\| & \sigma_2 & \sigma_2 \text{Tr}\sigma & (\sigma_2)^2 \\ \text{Tr}\sigma & (\text{Tr}\sigma)^2 & \|\sigma\| & \sigma_3 & \sigma_3 \text{Tr}\sigma & (\sigma_3)^2 \end{bmatrix},$$

ou seja, com M (matriz simétrica):

$$M = \begin{bmatrix} 3(\text{Tr}\sigma)^2 & 3(\text{Tr}\sigma)^3 & 3(\text{Tr}\sigma)\|\sigma\| & (\text{Tr}\sigma)^2 & (\text{Tr}\sigma)^3 & (\text{Tr}\sigma)\|\sigma\| \\ 3(\text{Tr}\sigma)^3 & 3(\text{Tr}\sigma)^4 & 3(\text{Tr}\sigma)^2\|\sigma\| & (\text{Tr}\sigma)^3 & (\text{Tr}\sigma)^4 & (\text{Tr}\sigma)^2\|\sigma\| \\ 3(\text{Tr}\sigma)\|\sigma\| & 3(\text{Tr}\sigma)^2\|\sigma\| & 3\|\sigma\|^4 & (\text{Tr}\sigma)\|\sigma\| & (\text{Tr}\sigma)^2\|\sigma\| & \|\sigma\|^2 \\ (\text{Tr}\sigma)^2 & (\text{Tr}\sigma)^3 & (\text{Tr}\sigma)\|\sigma\| & \|\sigma\| & (\text{Tr}\sigma)\|\sigma\| & \text{Tr}(\sigma^3) \\ (\text{Tr}\sigma)^3 & (\text{Tr}\sigma)^4 & (\text{Tr}\sigma)^2\|\sigma\| & (\text{Tr}\sigma)\|\sigma\| & (\text{Tr}\sigma)^2\|\sigma\| & (\text{Tr}\sigma)\text{Tr}(\sigma^3) \\ (\text{Tr}\sigma)\|\sigma\| & (\text{Tr}\sigma)^2\|\sigma\| & \|\sigma\|^2 & \text{Tr}(\sigma^3) & (\text{Tr}\sigma)\text{Tr}(\sigma^3) & \text{Tr}(\sigma^4) \end{bmatrix} = M^T.$$

É fácil demonstrar que essa matriz é degenerada (independentemente das medidas oferecidas pela máquina). Basta, por exemplo, dividir a quinta coluna de detM por (Trσ) para, então, verificar que esta nova coluna é igual à quarta (o que comprova a nulidade do determinante). Isto significa que o sistema (2.01) admite uma infinidade de soluções.

Em outras palavras: com apenas um estágio de carga é impossível determinar todas as constantes plásticas da lei.

2.2 - Cálculo das constantes com vários estágios de carga

Com dois estágios independentes de carga, ou seja, com os pares de medidas $(\sigma^{(1)}, \epsilon^{(1)})$ e $(\sigma^{(2)}, \epsilon^{(2)})$ poderemos empilhar as matrizes correspondentes na lei (3.01). Para simplificar a escrita vamos por:

$$\{\epsilon\} = [\epsilon^{(1)}_1 \ \epsilon^{(1)}_2 \ \epsilon^{(1)}_3 \ \epsilon^{(2)}_1 \ \epsilon^{(2)}_2 \ \epsilon^{(2)}_3]^T, \quad \{F\} = [F_1 \ F_2 \ F_3 \ F_4 \ F_5 \ F_6]^T,$$

matrizes colunas 6x1 e

$$B^{(1)} = \begin{bmatrix} \text{Tr}\sigma^{(1)} & (\text{Tr}\sigma^{(1)})^2 & \|\sigma^{(1)}\| & \sigma^{(1)}_1 & \sigma^{(1)}_1 \text{Tr}\sigma^{(1)} & (\sigma^{(1)}_1)^2 \\ \text{Tr}\sigma^{(1)} & (\text{Tr}\sigma^{(1)})^2 & \|\sigma^{(1)}\| & \sigma^{(1)}_2 & \sigma^{(1)}_2 \text{Tr}\sigma^{(1)} & (\sigma^{(1)}_2)^2 \\ \text{Tr}\sigma^{(1)} & (\text{Tr}\sigma^{(1)})^2 & \|\sigma^{(1)}\| & \sigma^{(1)}_3 & \sigma^{(1)}_3 \text{Tr}\sigma^{(1)} & (\sigma^{(1)}_3)^2 \end{bmatrix}, \quad (2.02),$$

matriz retangular 3x6. Da mesma forma escrevemos a análoga $B^{(2)}$. Assim, em forma compacta podemos escrever:

$$\{\epsilon\} = \begin{bmatrix} [B^{(1)}] \\ [B^{(2)}] \end{bmatrix} \cdot \{D\}, \quad (2.03).$$

Vem, de (2.03):

$$[B^{(1)}]^T [B^{(2)}]^T \{\epsilon\} = [B^{(1)}]^T [B^{(2)}]^T \begin{bmatrix} [B^{(1)}] \\ [B^{(2)}] \end{bmatrix} \cdot \{F\}.$$

O primeiro membro é igual à matriz 6x1 cujos elementos, de cima para baixo, todos conhecidos, são:

$$\begin{aligned}
& (\text{Tr}\boldsymbol{\sigma}^{(1)})(\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)})), \\
& (\text{Tr}\boldsymbol{\sigma}^{(1)})^2(\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)})) + (\text{Tr}\boldsymbol{\sigma}^{(2)})^2(\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(2)})), \\
& \|\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\|(\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)})) + \|\boldsymbol{\sigma}^{(1)}\|(\text{Tr}(\boldsymbol{\varepsilon}^{(1)})), \\
& \boldsymbol{\sigma}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)} + \boldsymbol{\sigma}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}, \\
& (\text{Tr}\boldsymbol{\sigma}^{(1)})(\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)}) + (\text{Tr}\boldsymbol{\sigma}^{(2)})(\boldsymbol{\sigma}^{(2)} : \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)}), \\
& (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} : (\boldsymbol{\sigma}^{(1)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(1)})) + (\boldsymbol{\sigma}^{(2)} : (\boldsymbol{\sigma}^{(2)} \cdot \boldsymbol{\varepsilon}^{(2)})).
\end{aligned}$$

O segundo membro pode ser escrito na forma: $([\mathbf{B}^{(1)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(1)}] + [\mathbf{B}^{(2)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(2)}]) \cdot \{F\}$, calculando-se $([\mathbf{B}^{(1)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(1)}])$ com o uso de (2.02) e $([\mathbf{B}^{(2)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(2)}])$ com expressão análoga.

Agora, invertendo-se, se possível, a soma dessas duas matrizes obtém-se, enfim, a solução, pela expressão:

$$\{F\} = ([\mathbf{B}^{(1)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(1)}] + [\mathbf{B}^{(2)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(2)}])^{-1} \cdot [[\mathbf{B}^{(1)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(2)}]^T] \cdot \{\varepsilon\}, \quad (2.04).$$

Por caminho e raciocínio idênticos aos anteriores poderemos desenvolver uma expressão geral para o cálculo das constantes F considerando n medidas. A equação correspondente a (3.03) será

$$\{\varepsilon\} = \begin{bmatrix} [\mathbf{B}^{(1)}] \\ [\mathbf{B}^{(2)}] \\ \dots \\ [\mathbf{B}^{(n)}] \end{bmatrix} \cdot \{F\}, \quad (2.05),$$

a coluna do primeiro membro tendo agora $3n$ linhas, as matrizes $[\mathbf{B}^{(i)}]$ - todas 3×6 - mantendo a estrutura apresentada por (2.02). Resultará:

$$\{F\} = ([\mathbf{B}^{(1)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(1)}] + [\mathbf{B}^{(2)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(2)}] + \dots + [\mathbf{B}^{(n)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(n)}])^{-1} \cdot [[\mathbf{B}^{(1)}]^T \cdot [\mathbf{B}^{(2)}]^T \dots [\mathbf{B}^{(n)}]^T] \cdot \{\varepsilon\}, \quad (2.06).$$

Resumo:

1 - Para efeito de determinação das **constantes** do modelo, esse método elimina preocupações com ensaios particulares e eventuais traçados de gráficos para as mesmas finalidades.

2 - Se for viável a realização de mais de um ensaio, cada um com vários estágios, acima da quantidade mínima necessária e suficiente para tal (que ainda desconhecemos por falta de prova analítica), haverá também a necessidade de preparação de programas computacionais que, recebendo as informações da máquina, apresentem as respostas imediatamente. Quem vai indicar a impossibilidade de inversão necessária em (2.06) é o programa utilizado para a realização dos cálculos.

3 - Por outro lado, estas “vantagens” não querem significar que ensaios particulares não sejam necessários, pois poderá ser precioso o conhecimento do comportamento de um solo em relação à forma como ele irá trabalhar.

Trajetórias de tensões e deformações

A cada estágio de carga escolhido para um ensaio corresponderá um ponto no espaço definido por eixos $(\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3)$; o conjunto desses pontos define uma *trajetória de tensões*. Assim, a cada ensaio corresponderá uma trajetória de tensões. É imperioso observar-se que as constantes das leis (1.01) não podem depender da trajetória das tensões utilizada para a execução do ensaio. Isto pode e deve ser verificado executando-se um novo ensaio com o mesmo solo (e com nova trajetória de tensões). Se a máquina TTA permitir, poderá ser escolhida uma “trajetória de deformações”, aplicando-se ao cp deformações escolhidas e, por (1.02), determinar-se a lei constitutiva inversa de (1.01). As constantes F,

ou as S, de (1.01) ou (1.02), constituirão a “carteira de identidade” do solo em termos de comportamento mecânico.

Uma alternativa de trajetória pode ser um conjunto de três direções arbitrárias, pois nesse caso, sendo seguro que não haverá proporcionalidade entre dois estados quaisquer de tensões, haverá garantia da inversão da matriz indicada em (2.06). O mesmo se pode dizer em relação às trajetórias de deformações.

Existem muitas alternativas de trajetórias que podem ser consideradas como, por exemplo, a relativa a pontos da direção octaédrica do espaço de tensões (a trisectriz do primeiro quadrante das direções principais).

3 – Resultado encontrado para estados de tensão

As 6 constantes do modelo quadrático (1.01) foram determinadas com o uso do Excel levando-se em conta todas os 10 pares de medidas registrados em laboratório; são elas:

$$F_1 = -0,0104362246 \frac{1}{\text{MPa}}, \quad F_2 = -0,0431655591 \frac{1}{(\text{MPa})^2}, \quad F_3 = 0,05603626 \frac{1}{(\text{MPa})^2},$$

$$F_4 = 0,044987138 \frac{1}{\text{MPa}}, \quad F_5 = 0,134441445 \frac{1}{(\text{MPa})^2}, \quad F_6 = -0,18647 \frac{1}{(\text{MPa})^2},$$
(3.01),

observando-se constantes positivas e negativas. Como já mencionado em alguma oportunidade, a equação (2.06) é resultante de um ajuste dos dados ao modelo quadrático aplicando o método dos mínimos quadrados de erros. Escrevemos, assim, a seguinte equação para o solo ensaiado (com constantes com apenas 5 casas decimais):

$$\varepsilon = [-0,01044(\text{Tr } \sigma) - 0,04317(\text{Tr } \sigma)^2 + 0,05604 \|\sigma\|] \mathbf{I} +$$

$$+ [(0,044987 + 0,13444(\text{Tr } \sigma)) \sigma - 0,18647 \sigma^2],$$
(3.02).

Esta equação é “universal” ou tensorial, isto é, ela é válida em qualquer sistema de referência, não só no triortogonal usado para gerá-la porque tanto ε quanto σ são tensores.

NOTA IMPORTANTE:

O tempo transcorrido entre um estágio e outro deve ser o mais longo possível para reproduzirmos com maior aproximação o que se passa na prática, quando se constrói um aterro ou se faz uma escavação. Parece que os três primeiros estágios de carga acarretam muita perturbação no cp, o que pode ser observado pelos gráficos apresentados. Parece que um novo cálculo de constantes com a eliminação desses estágios poderia indicar constantes mais expressivas, em vista da quase total eliminação das perturbações.

Expressões literais das equações

A equação (1.01) é equivalente ao seguinte sistema de equações algébricas (não lineares nas variáveis σ_1 , σ_2 e σ_3):

$$\varepsilon_1 = (F_2 + F_3 + F_5 + F_6)\sigma_1^2 + (F_2 + F_3)\sigma_2^2 + (F_2 + F_3)\sigma_3^2 +$$

$$+ (2F_2 + F_5)\sigma_1\sigma_2 + 2F_2\sigma_2\sigma_3 + (2F_2 + F_5)\sigma_3\sigma_1 +$$

$$+ (F_1 + F_4)\sigma_1 + F_1\sigma_2 + F_1\sigma_3,$$
(3.03.a).

$$\varepsilon_2 = (F_2 + F_3)\sigma_1^2 + (F_2 + F_3 + F_5 + F_6)\sigma_2^2 + (F_2 + F_3)\sigma_3^2 +$$

$$+ (2F_2 + F_5)\sigma_1\sigma_2 + (2F_2 + F_5)\sigma_2\sigma_3 + 2F_2\sigma_3\sigma_1 +$$

$$+ F_1\sigma_1 + (F_1 + F_4)\sigma_2 + F_1\sigma_3,$$
(3.03.b),

$$\begin{aligned} \varepsilon_3 = (F_2 + F_3)\sigma_1^2 + (F_2 + F_3)\sigma_2^2 + (F_2 + F_3 + F_5 + F_6)\sigma_3^2 + \\ 2F_2\sigma_1\sigma_2 + (2F_2 + F_5)\sigma_2\sigma_3 + (2F_2 + F_5)\sigma_3\sigma_1 + \\ + F_1\sigma_1 + F_1\sigma_2 + (F_1 + F_4)\sigma_3, \end{aligned} \quad (3.03,c),$$

em que os 9 coeficientes (6 da forma quadrática e 3 da forma linear) são relações entre as constantes F já determinadas.

Oportunamente será interessante considerar as três equações anteriores nas formas matriciais equivalentes seguintes:

$$\varepsilon_1 = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3] \cdot \begin{bmatrix} F_2 + F_3 + F_5 + F_6 & \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) & \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) \\ \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) & F_2 + F_3 & F_2 \\ \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) & F_2 & F_2 + F_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} + [F_1 + F_4 \ F_1 \ F_1] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (3.04,a),$$

$$\varepsilon_2 = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3] \cdot \begin{bmatrix} F_2 + F_3 & \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) & F_2 \\ \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) & F_2 + F_3 + F_5 + F_6 & \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) \\ F_2 & \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) & F_2 + F_3 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} + [F_1 \ F_1 + F_4 \ F_1] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (3.04.b),$$

$$\varepsilon_3 = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3] \cdot \begin{bmatrix} F_2 + F_3 & F_2 & \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) \\ F_2 & F_2 + F_3 & \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) \\ \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) & \frac{1}{2}(2F_2 + F_5) & F_2 + F_3 + F_5 + F_6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} + [F_1 \ F_1 \ F_1 + F_4] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (3.04.c).$$

As equações com coeficientes numéricos

Atribuindo os valores numéricos das constantes F, listados em (3.01), temos:

$$\varepsilon_1 = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3] \cdot \begin{bmatrix} -0,03916 & 0,02405 & 0,02405 \\ 0,02405 & 0,01287 & -0,04317 \\ 0,02405 & -0,04317 & 0,01287 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} + [0,03455 \ -0,01044 \ -0,01044] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (3.05,a)$$

$$\varepsilon_2 = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3] \cdot \begin{bmatrix} 0,01287 & 0,02405 & -0,04317 \\ 0,02405 & -0,03916 & 0,02405 \\ -0,04317 & 0,02405 & 0,01287 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} + [-0,01044 \ 0,03455 \ -0,01044] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (3.05.b),$$

$$\varepsilon_3 = [\sigma_1 \ \sigma_2 \ \sigma_3] \cdot \begin{bmatrix} 0,01287 & -0,04317 & 0,02405 \\ -0,04317 & 0,01287 & 0,02405 \\ 0,02405 & 0,02405 & -0,03916 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix} + [-0,01044 \ -0,01044 \ 0,03455] \cdot \begin{bmatrix} \sigma_1 \\ \sigma_2 \\ \sigma_3 \end{bmatrix}, \quad (3.05,c),$$

A representação de (3.02) no sistema triortogonal utilizado para a determinação das constantes é, como já mencionado, equivalente à equação matricial

$$\begin{bmatrix} \varepsilon_1 & 0 & 0 \\ 0 & \varepsilon_2 & 0 \\ 0 & 0 & \varepsilon_3 \end{bmatrix} = [-0,01044(\text{Tr } \boldsymbol{\sigma}) - 0,04317(\text{Tr } \boldsymbol{\sigma})^2 + 0,05604\|\boldsymbol{\sigma}\|] \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} + \\ + [(0,044987 + 0,13444(\text{Tr } \boldsymbol{\sigma})) \begin{bmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3 \end{bmatrix} - 0,18647 \begin{bmatrix} \sigma_1^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_2^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_3^2 \end{bmatrix}], \quad (3.06),$$

que, por sua vez é equivalente a um sistema não linear de três equações nas três variáveis σ_1 , σ_2 e σ_3 .

Para qualquer i ($=1, 2$ e 3) a equação genérica do sistema é

$$\varepsilon_i = -0,01044(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3) - 0,04317(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2 + 0,05604(\sigma_1^2 + \sigma_2^2 + \sigma_3^2) + \\ + [0,044987 + 0,13444(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)]\sigma_i - 0,18647\sigma_i^2 \quad (3.07).$$

Para $i=1$,

$$\varepsilon_1 = -0,0391617\sigma_1^2 + 0,0128707\sigma_2^2 + 0,0128707\sigma_3^2 + \\ + 0,0481110326\sigma_1\sigma_2 - 0,086331118\sigma_2\sigma_3 + 0,048110326\sigma_3\sigma_1 + \\ + 0,034523513\sigma_1 - 0,0104362246\sigma_2 - 0,0104362246\sigma_3, \quad (3.08),$$

expressão que mostra ser ε_1 uma função quadrática completa nas variáveis σ_1 , σ_2 e σ_3 .

Para $i = 2$:

$$\varepsilon_2 = 0,0128707\sigma_1^2 - 0,0391617\sigma_2^2 + 0,0128707\sigma_3^2 + \\ + 0,048110326\sigma_1\sigma_2 + 0,048110326\sigma_2\sigma_3 - 0,086331118\sigma_3\sigma_1 - \\ - 0,0104362246\sigma_1 + 0,034523513\sigma_2 - 0,0104362246\sigma_3, \quad (3.09).$$

Para $i=3$:

$$\varepsilon_3 = 0,0128707\sigma_1^2 + 0,0128707\sigma_2^2 - 0,0391617\sigma_3^2 - \\ - 0,086331118\sigma_1\sigma_2 + 0,0481110326\sigma_2\sigma_3 + 0,0481110326\sigma_3\sigma_1 + \\ - 0,0104362246\sigma_1 - 0,0104362246\sigma_2 + 0,034523513\sigma_3, \quad (3.10).$$

Esse passo era o mais importante depois das medidas coletadas nos ensaios. É claro que, por serem as constantes ajustadas pelo método dos mínimos quadrados de erros, a maioria dos testes deverá apresentar uma boa aderência com as medidas experimentais.

Um teste com as tensões do quinto estágio que correspondem às deformações medidas de $\varepsilon_1=1,3154 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2=1,3976 \times 10^{-2}$ e $\varepsilon_3=-1,20533 \times 10^{-2}$. Essas medidas calculadas pelo modelo (01) para $\sigma_1=1,244$ kPa, $\sigma_2=0,482$ kPa e $\sigma_3=0,353$ kPa (tensões efetivas), são: $\varepsilon_1=1,35 \times 10^{-2}$, $\varepsilon_2=0,986 \times 10^{-2}$ e $\varepsilon_3=-1,266 \times 10^{-2}$. Parece que o ajuste da equação aos dados ficou muito bom. Esse assunto pode ser mais explorado, o que não será feito aqui.

4 - Estados particulares de tensão

No momento interessa analisar o modelo (1.01), ou o sistema constituído por (3.08), (3.09) e (3.10) que lhe é equivalente, para estados particulares de tensão e comparar resultados qualitativos e quantitativos (se possível) com ensaios clássicos e situações conhecidas na prática. Destacaremos apenas os estados de tensão seguintes: compressão simples (uniaxial stress state), triaxial cilíndrico clássico (conventional triaxial compression), hidrostático (hydrostatic stress state) e cisalhamento puro (pure shear stress state).

4.1 – Compressão uniaxial

(σ_1 variável, $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$)

Podemos partir das equações gerais deduzidas e fazer nelas $\sigma_2 = \sigma_3 = 0$. Obteremos (correspondentes a (3.03,a), (3.03,b) e (3.03,c)), respectivamente:

$$\varepsilon_1 = A_1\sigma_1^2 + B_1\sigma_1, \quad \text{com} \quad A_1 = F_2 + F_3 + F_5 + F_6, \quad B_1 = F_1 + F_4$$

e

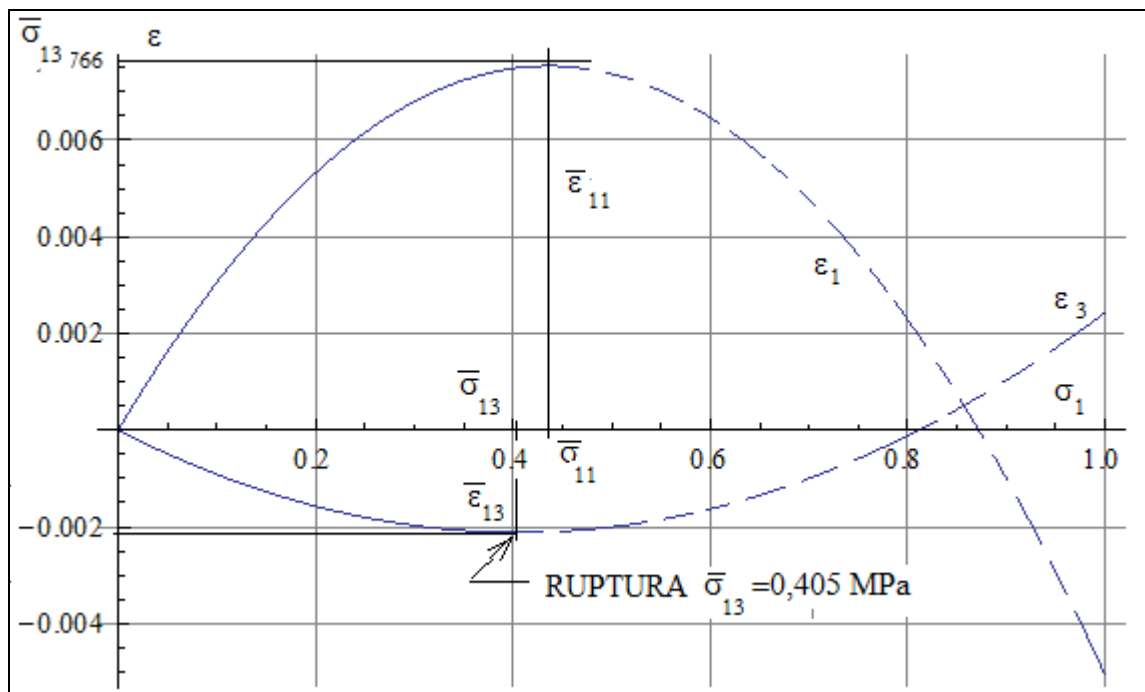
$$\varepsilon_3 = A_3\sigma_1^2 + B_3\sigma_1 = \varepsilon_2, \quad \text{com} \quad A_3 = F_2 + F_3, \quad B_3 = F_1$$

Numericamente,

$$\varepsilon_1 = -0,0391617\sigma_1^2 + 0,0345509\sigma_1 \quad (4.01),$$

$$\varepsilon_3 = 0,0128707\sigma_1^2 - 0,0104362246\sigma_1 = \varepsilon_2 \quad (4.02),$$

às quais correspondem os gráficos a seguir:



Essas curvas são a resposta do solo à solicitação imposta.

Assim, à medida que σ_1 cresce, desde zero, a deformação ε_1 cresce; o solo resiste à deformação imposta pela tensão aplicada. Quando σ_1 atinge o valor $\bar{\sigma}_{11}$ que anula a primeira derivada de ε_1 em relação a σ_1 - isto é: $0 = 2A_1\bar{\sigma}_{11} + B_1$ - tem-se: $\bar{\sigma}_{11} = -B_1/2A_1$ sendo, numericamente, $\bar{\sigma}_{11} \cong 0,441 \text{ MPa}$. O valor correspondente de ε_1 , $\bar{\varepsilon}_{11}$, é obtido de (01), tendo-se: $\bar{\varepsilon}_{11} = 0,5 B_1 \bar{\sigma}_{11} = 0,00776$. Para $\sigma_1 > \bar{\sigma}_{11}$ o solo perde resistência, pois começa a responder com valores menores que $\bar{\varepsilon}_{11}$.

De outro lado, o mesmo se pode dizer com relação às variações de ε_3 , sendo $\bar{\sigma}_{13} = -B_3/2A_3$ o valor da tensão aplicada que anula a derivada primeira de ε_3 em relação a σ_1 . Assim, em qualquer direção ortogonal à direção 1, o solo perde resistência, por estiramento, para $\sigma_1 = \bar{\sigma}_{13} < \bar{\sigma}_{11}$, sendo $\bar{\sigma}_{13} = 0,405426 \text{ MPa}$. Para esse valor da tensão o solo foi estirado ao extremo, isto é, até $\varepsilon_3 = \bar{\varepsilon}_{13} = -0,5 B_3 \bar{\sigma}_{13}$, ou numericamente, $\varepsilon_3 = \bar{\varepsilon}_{13} = -0,2 \times 10^{-2} = 2 \times 10^{-3}$. Assim, devemos postular

que a tensão $\bar{\sigma}_{13} \cong 0,405426 \text{MPa}$ é a *tensão de ruptura do solo à compressão simples* e $\bar{\varepsilon}_{13} = -0,2 \times 10^{-2}$ a *deformação de ruptura do solo (por estiramento)*.

Deve ser observado que este ensaio fornece um valor de ruptura do solo, por deformação, pouco importando a natureza da sollicitação.

4.2 – Estado de tensão triaxial com simetria cilíndrica (convencional)

(σ_1 variável, $\sigma_2 = \sigma_3$ variáveis)

Os intervalos de variação das tensões são:

$$0 \leq \sigma_1 \leq 2,488 \text{ (em Mpa)}, \quad 0 \leq \sigma_2 = \sigma_3 \leq 1,195 \text{ (em MPa)};$$

e as equações são deduzidas de (3.08), (3.09) e (3.10):

$$\varepsilon_1 = -0,03916\sigma_1^2 - 0,06059\sigma_3^2 + 0,09622\sigma_1\sigma_3 + 0,03455\sigma_1 - 0,02087\sigma_3, \quad (4.03),$$

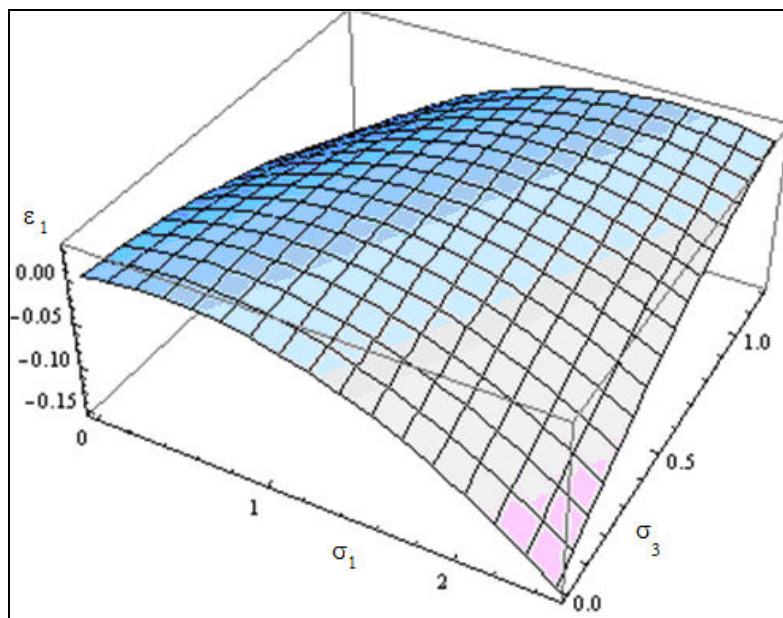
$$\varepsilon_3 = \varepsilon_2 = 0,01287\sigma_1^2 + 0,02189\sigma_3^2 - 0,03822\sigma_3\sigma_1 - 0,01044\sigma_1 + 0,024117\sigma_3, \quad (4.04).$$

Deduzimos imediatamente dessas equações a equação da máxima distorção, γ_{\max} , em cada estágio de carga:

$$\gamma_{\max} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon_3}{2} = -0,026015\sigma_1^2 - 0,041205\sigma_3^2 + 0,06722\sigma_1\sigma_3 + 0,0224935\sigma_1 - 0,0221935\sigma_3, \quad (4.05).$$

Cada uma dessas três equações expressa uma deformação em função de σ_1 e σ_3 , ou seja, cada variável do primeiro membro assume valores de coordenadas dos pontos de uma quádrica quando σ_1 e σ_3 variarem em seus intervalos. As figuras a seguir, produzidas pelo programa Mathematica, traduzem graficamente essas três equações.

Superfície ε_1 – equação (4.03)



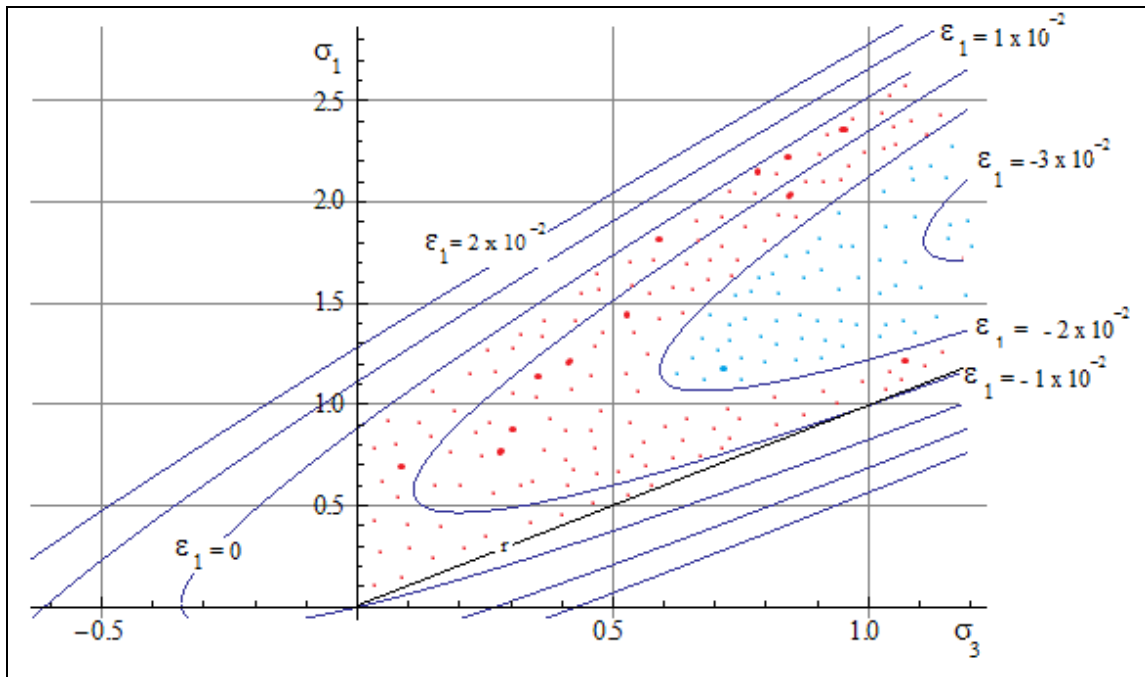
Variações de ε_1

O gráfico da superfície indica que, em geral, o solo sofre estiramento (ou distensão) em boa parte dos estágios de carregamento, o que pode parecer absurdo do ponto de vista físico uma vez que o solo está sempre comprimido pelas faces do cp. Mas os valores relativos das tensões podem indicar encurtamento (contração) também.

De fato, vamos expressar σ_1 em função de σ_3 e de ε_1 como parâmetro, a partir da equação (4.03); obteremos:

$$\sigma_1 = 1,22993\sigma_3 + 0,44163 \pm \sqrt{-0,0344\sigma_3^2 + 0,55343\sigma_3 + 0,19504 + 25,5363\varepsilon_1}, \quad (4.06),$$

onde poderemos fazer ε_1 estacionário, variando aos saltos, digamos desde -1×10^{-2} até 2×10^{-2} . Esta operação significa praticar seções na superfície ε_1 para cada valor de ε_1 , interseção essa representada pela parábola (4.06). Tais seções, em conjunto, estão representadas na figura a seguir onde a reta r indica as condições do ensaio: $\sigma_1 > \sigma_3$.



A região pontilhada da figura (em vermelho e azul) mostra que:

num ensaio triaxial cilíndrico (convencional) realizável com o solo em referência pode ocorrer estiramento do mesmo, $\varepsilon_1 < 0$, na direção da maior tensão aplicada (σ_1), conforme os valores da menor tensão aplicada (σ_3).

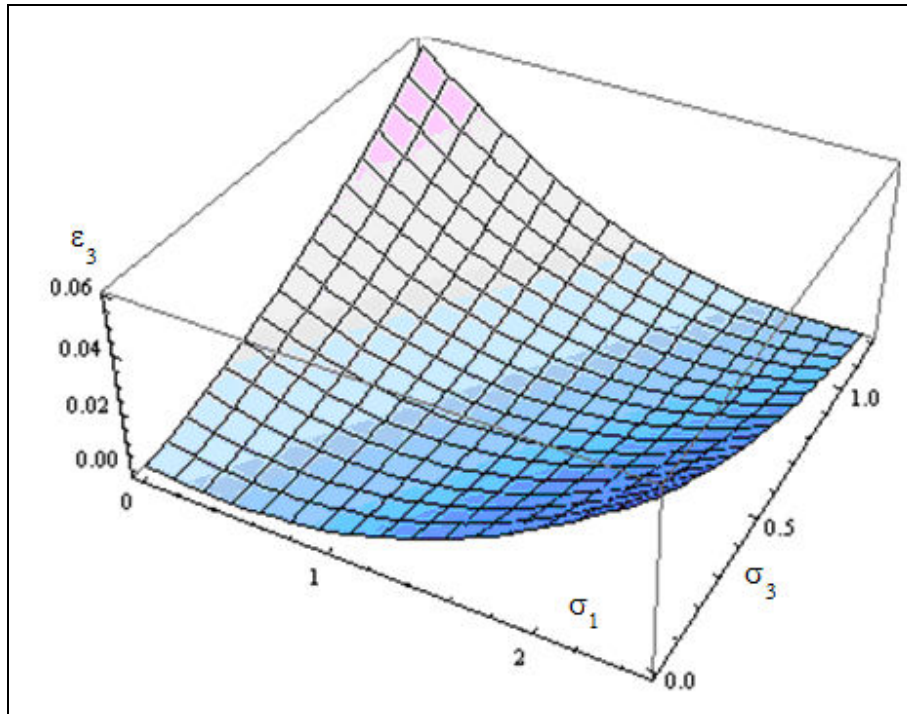
Vamos denominar essa ampla região de “zona de estiramento do solo”. A constatação dessa zona parece ser uma “falsa anomalia” porque a compressão do sólido por todas as faces gera a expectativa de encurtamentos generalizados; o que pode não ocorrer. Embora haja compressão (baixa) nas direções 2 e 3 pode estar estabelecida tração alta nessas mesmas direções (o que será visto a seguir), acarretando variação excessiva das dimensões do solo. Por outro lado, isto pode acarretar um estiramento do solo na direção 1, embora nessa direção ocorra tensão de compressão.

O que se poderia dizer a respeito de colapso do solo nesse tipo de estado de tensão?

Por consequência do ensaio de compressão, sempre que ocorrer estiramento de valor superior a -2×10^{-3} o solo perde resistência. A curva relativa a $\varepsilon_1 = -2 \times 10^{-3}$, indicada na figura, restringe a zona de estiramento suportável pelo solo para a região pontilhada em vermelho apenas.

Superfície ε_3

A figura a seguir esboça a superfície de equação (4.04), correspondente às deformações iguais $\varepsilon_2 = \varepsilon_3$ para as tensões variando nos seus respectivos intervalos.

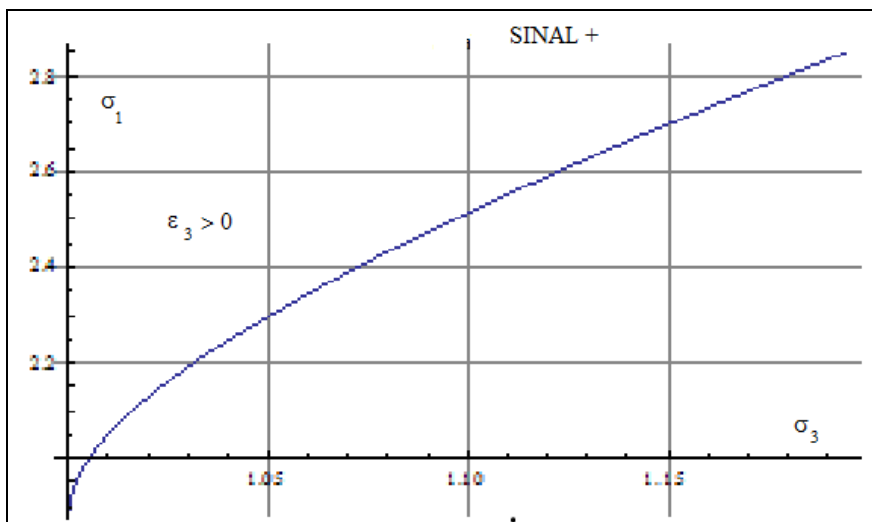


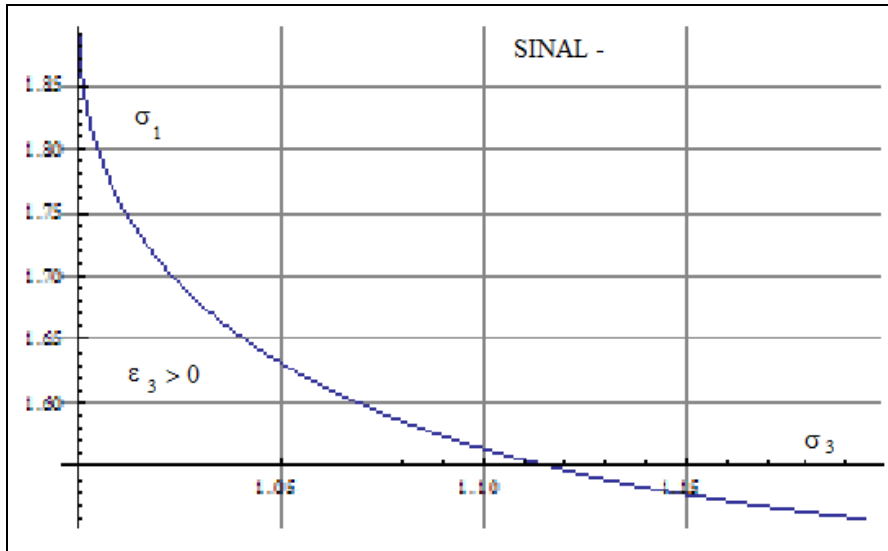
Para enxergar melhor os sinais assumidos por ϵ_3 devemos determinar as cônicas interseção da superfície com os planos $\epsilon_3 = \text{constante}$ (possivelmente parábolas), cujas equações podem ser postas na forma

Expressando σ_1 em função de σ_3 e de ϵ_3 pela equação (4.04), obtemos:

$$\sigma_1 = 0,405017 + 1,4848\sigma_3 \pm \sqrt{0,50368(\sigma_3 - 1,00046)(\sigma_3 + 3,39097) - 77,69585\epsilon_3} , \quad (4.07),$$

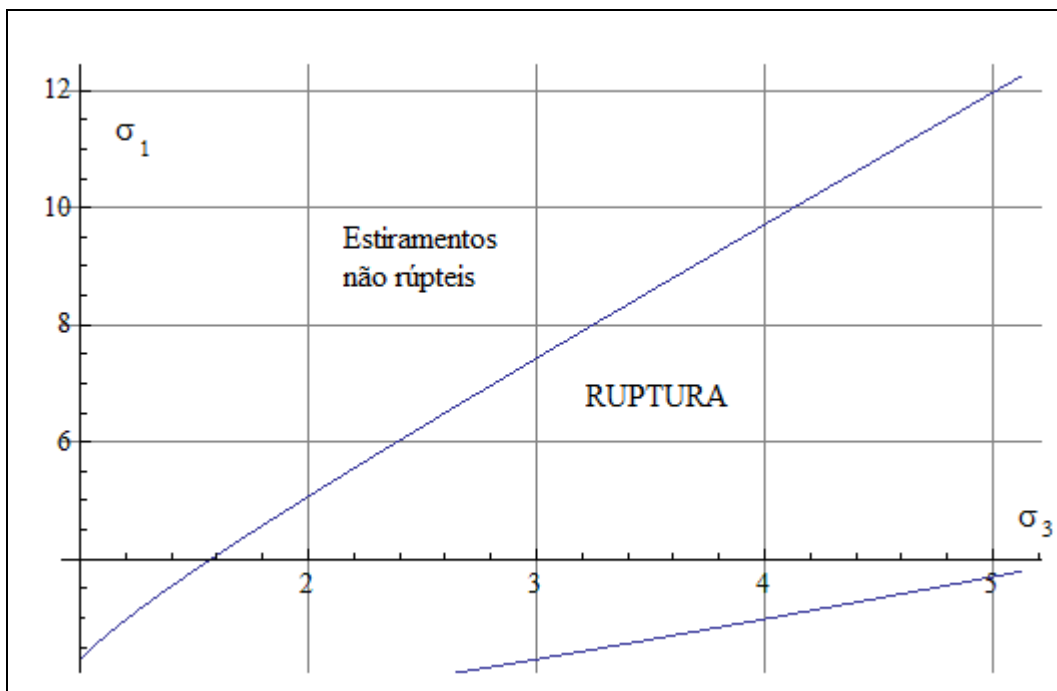
a qual, como se vê, só admite σ_1 real para $\sigma_3 > 1,00046$. Dois ramos dessa cônica para $\epsilon_3 = 0$ estão representados nas figuras a seguir (em escalas diferentes).





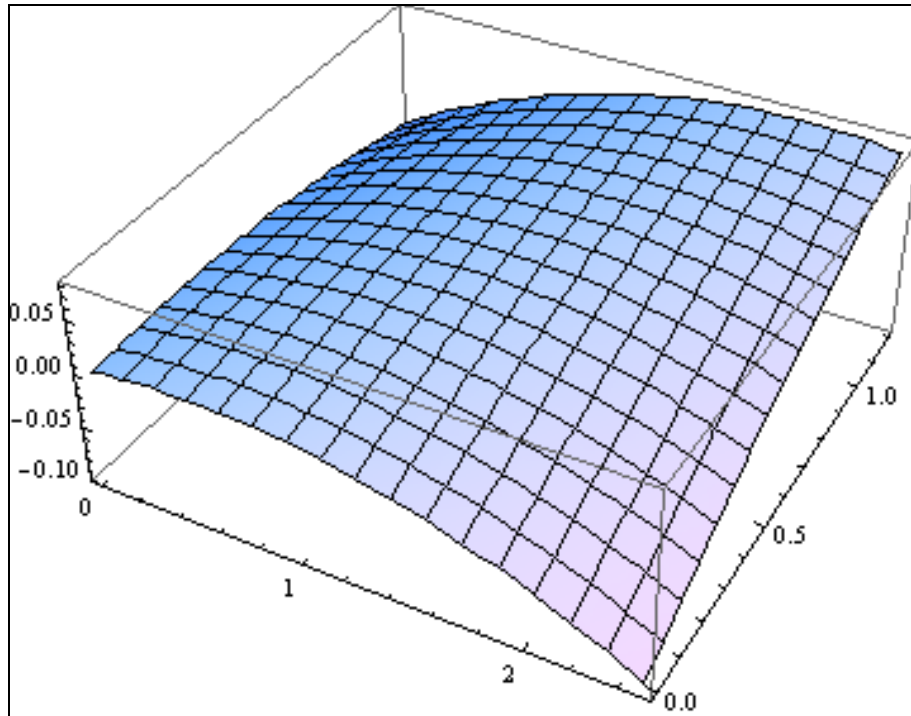
Todo o ensaio foi realizado com $\sigma_1 > \sigma_3$ e para $\sigma_3 = 1,00046$ deve ser $\sigma_1 > 1,89$, caso em que $\epsilon_3 > 0$ (contração).

Consideremos, por exemplo, $\sigma_3 = 0,733 \text{ MPa} < 1,00046$ e $\sigma_1 = 0,991 < 1,89 \text{ MPa}$. Pela equação (4.04) do modelo, tem-se $\epsilon_3 = +0.00389$. Como a curva (4.07) define pontos (σ_1, σ_3) que correspondem a $\epsilon_3 = 0$, ela mesma separa os pares (σ_1, σ_3) aos quais devam corresponder ϵ_3 positivos e negativos. Assim, estados de tensão correspondentes a pontos no interior da parte côncava da curva corresponde estiramentos do solo. Mas o estiramento de ruptura, -2×10^{-3} , só ocorrerá para valores muito grandes de σ_1 e σ_3 , todos interiores à parábola indicada na figura seguinte. Em outras palavras: não haverá colapso do solo para os estados de tensão correspondentes a pares (σ_1, σ_3) não interiores à parábola indicada na figura.



Superfície γ_{\max} – equação (4.05)

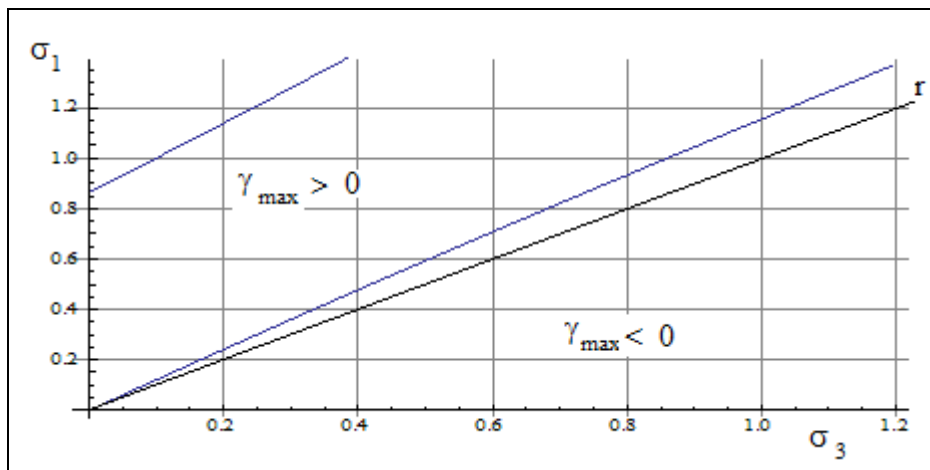
A superfície correspondente à máxima distorção em cada estágio de carga, cuja equação é (4.05), é apresentada na figura a seguir.



Seção pelo plano $\gamma_{\max} = 0$ é a cônica:

$$\sigma_1 = 1,291945\sigma_3 + 0,43232 \pm \sqrt{(1,291945\sigma_3 + 0,43232)^2 - 4(1,58524\sigma_3 + 1,06323)}, \quad (4.08),$$

esquematzada na figura seguinte que indica, inclusive, a reta r que separa os pontos de coordenadas $\sigma_1 > \sigma_3$. Os pontos (σ_1, σ_3) interiores à cônica acarretam $\gamma_{\max} > 0$, mas essa questão não é muito relevante.

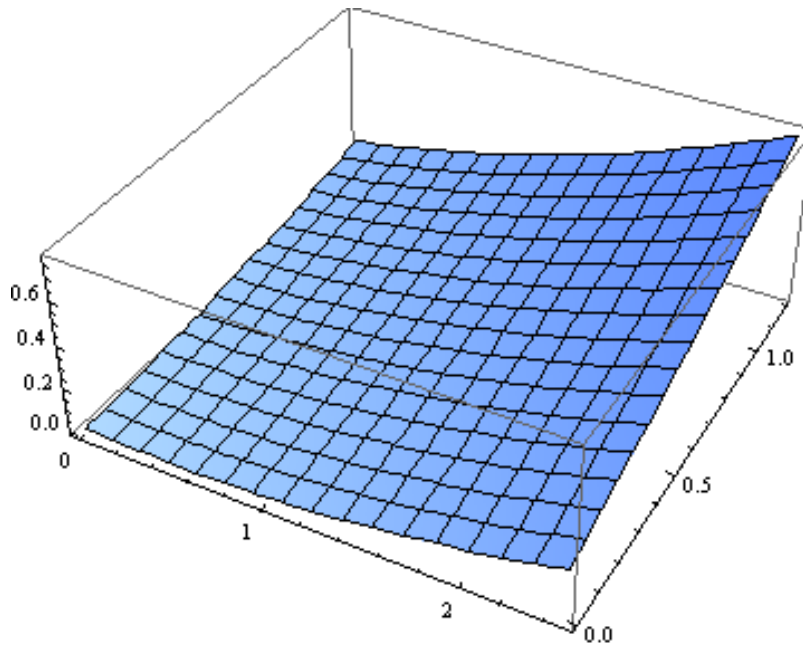


Por exemplo: para $\sigma_1 = 0,8$ MPa e $\sigma_3 = 0,4$ MPa, tem-se $\gamma_{\max} = 0,0052$; para $\sigma_1 = 0,4$ MPa e $\sigma_3 = 0,8$ MPa, tem-se $\gamma_{\max} = -0,0022$. Na prática, entretanto, o sinal de γ_{\max} é irrelevante.

Para $\varepsilon_3 = -2 \times 10^{-2}$ – que corresponde à deformação de ruptura do solo – tem-se, de (4.05)

$$\varepsilon_1 = -0,052030\sigma_1^2 - 0,082410\sigma_3^2 + 0,13444\sigma_1\sigma_3 + 0,0449870\sigma_1 - 0,0443870\sigma_3 - 0,02,$$

correspondendo a ε_1 valores altos, todos positivos, conforme se vê pela figura a seguir.



4.3 – Estado hidrostático de tensão

$$(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = \sigma_0, \text{ variáveis})$$

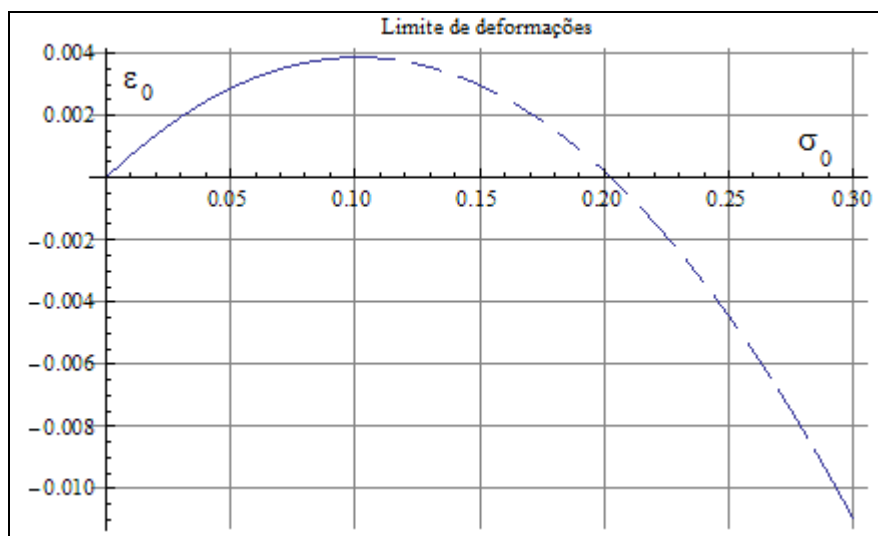
Ao estado hidrostático de tensão vai corresponder um estado hidrostático de deformação cuja equação se deduz facilmente de (1.01) considerando que $\text{Tr}\boldsymbol{\sigma} = 3 \sigma_0$ e $\|\boldsymbol{\sigma}\| = 3 \sigma_0^2$. Tem-se, de fato:

$$\boldsymbol{\varepsilon} = \varepsilon_0 \mathbf{I}, \quad \text{com} \quad \varepsilon_0 = [3(3F_2 + F_3 + F_5 + F_6) \sigma_0^2 + (3F_1 + F_4) \sigma_0], \quad (4.09).$$

Substituindo-se nessa expressão os valores das constantes dados por (3.01), vem:

$$\varepsilon_0 = -0,376467 \sigma_0^2 + 0,0762958 \sigma_0, \quad (4.10),$$

equação essa cuja representação gráfica é indicada na figura a seguir.



Vê-se que ocorre pequena deformação hidrostática da ordem de 4×10^{-3} quando σ_0 atinge o pequeno valor de 0,10 MPa. A deformação ε_0 é da ordem de 23% da maior das deformações registradas e a tensão σ_0 aproximadamente 8% da menor das tensões utilizadas no ensaio. Para valores de σ_0 maiores que 0,10 MPa as deformações hidrostáticas correspondentes perdem o sentido físico porque ε_0 diminui.

Para este estado de tensão o cp apresenta alguma deformação porque o cp não é saturado. Os vazios do solo vão diminuindo com o aumento da tensão hidrostática e tendem para um limite, quando, então, a dilatação tende para zero.

Os traços observados nos diferentes estágios se mantiveram entre 0,011 e 0,025, com média aproximada de 0,018 justificando a afirmativa anterior de que a deformação hidrostática calculada é da ordem de 22% dessa média. Parece que esses resultados são aceitáveis.

4.4 – Estado de cisalhamento puro

$$(\sigma_1 = \sigma_2 = \sigma_3 = 0, \quad \tau_{12} = \tau_{23} = 0, \quad \tau_{13} \neq 0)$$

Nesse estado, $\sigma_E = 0$ e $\|\sigma\| = 2 \tau_{13}^2$ escrevendo-se, de (1.01):

$$\boldsymbol{\varepsilon} = 2F_3\tau_{13}^2 \mathbf{I} + F_4 \boldsymbol{\sigma} + F_6\boldsymbol{\sigma}^2, \quad \text{donde} \quad \begin{cases} \varepsilon_1 = 2F_3\tau_{13}^2 = \varepsilon_2 = \varepsilon_3 \\ \varepsilon_{23} = \varepsilon_{12} = 0 \\ \varepsilon_{13} = F_4 \tau_{13} + F_6\tau_{13}^2 \end{cases}, \quad (4.11).$$

Numericamente as equações (4.11) são escritas nas formas:

$$\varepsilon_1 = 0,1120252 \tau_{13}^2 \quad \text{e} \quad \varepsilon_{13} = 0,044987138 \tau_{13} - 0,18647 \tau_{13}^2$$

cujas representações gráficas são apresentadas nas figuras seguintes.

A deformação ε_1 é função não decrescente de τ_{13} e passa por um máximo para $\tau_{13} = 0,12063$ MPa, quando $\varepsilon_{13} = 2,71 \times 10^{-3}$; ocorre, então, a ruptura do solo por cisalhamento puro. Para esse mesmo valor de τ_{13} a deformação é $\varepsilon_1 = 1,63 \times 10^{-3}$.

CONCLUSÃO

1 - O uso da máquina e a adoção da equação constitutiva quadrática parecem eliminar a necessidade de execução de todos os ensaios clássicos com solos (compressão uniaxial, cisalhamento puro, hidrostático etc.) porque os resultados de todos eles estão contidos em (1.01) e (1.02).

2 – Será possível determinar intervalos de variação das constantes plásticas (as Fs e as Ss) para grupos de solos para eventual previsão aproximada de comportamento?

3 – As equações (1.01) e (1.02) podem e devem ser aplicadas para qualquer material, sendo irrelevante a consideração de modelos lineares. Todos os corpos materiais admitem “superfícies de deformação” ou “superfícies de tensão” que são características de cada material.

4 – Existe um TTA para cada tipo de material (solos, concretos, rochas) posto que cada um deva apresentar uma capacidade de carregamento. Será difícil construir uma máquina mais versátil, aplicável a todos os casos? Nesse caso, como seria um laboratório de ensaios mecânicos de materiais geotécnicos?

BIBLIOGRAFIA

[1] – RUGGERI, E. R. F., *Lições de Cálculo Poliádico*, edição do autor, 2016, Goiânia.

4.5 – Estado de cisalhamento simples (simple shear)

$$(\sigma_1 = \sigma_s + \Delta\sigma_s, \sigma_3 = \sigma_s - \Delta\sigma_s, \text{ com } \sigma_s \text{ e } \Delta\sigma_s \text{ variáveis, } \sigma_2 = \text{const.}, \tau_{12} = \tau_{23} = \tau_{13} = 0)$$

Neste estado, $\sigma_E = 2\sigma_s + \sigma_2$ e $\|\boldsymbol{\sigma}\| = 2[\sigma_s^2 + (\Delta\sigma_s)^2]$, variáveis que deverão ser substituídas em (1.01).
Obtém-se:

Num ensaio conduzido por cisalhamento simples, a variação da tensão octaédrica $\Delta\tau_{\text{oct}}$ de um estágio para outro é constante, pois sendo

$$\tau_{\text{oct}}^2 = \frac{1}{9}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2], \text{ vem } \Delta\tau_{\text{oct}} = \sqrt{\frac{2}{3}} \Delta\sigma_s$$

$$\boldsymbol{\varepsilon} = (F_1\sigma_E + F_2\sigma_E^2 + F_3\|\boldsymbol{\sigma}\|)\mathbf{I} + (F_4 + F_5\sigma_E)\boldsymbol{\sigma} + F_6\boldsymbol{\sigma}^2, \quad (1.01),$$